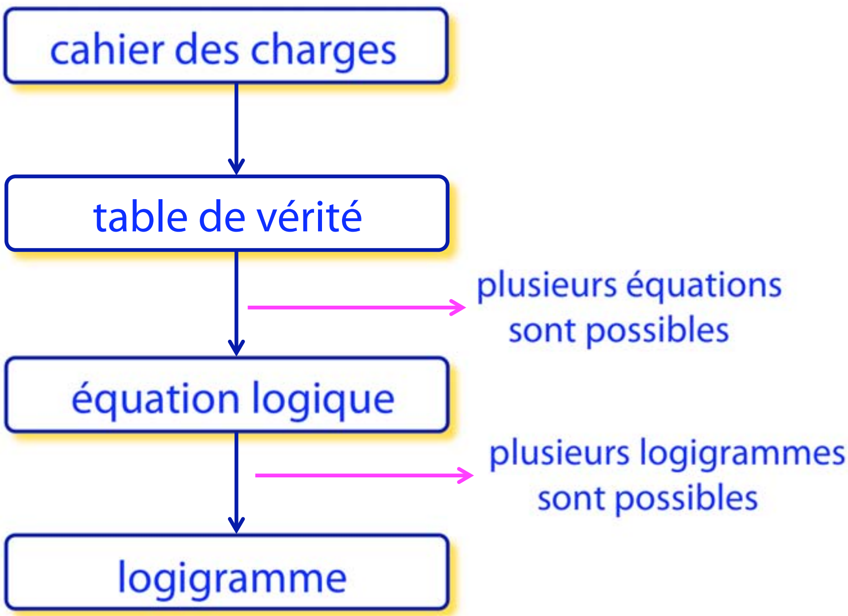
Synthèse des systèmes logiques combinatoires



Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

- L'équation canonique découle directement de la table de vérité. Mais il peut exister des solutions équivalentes qui comportent moins de monomes: des équations simplifiées
- Exemple: la fonction OU

a	b	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

solution canonique:

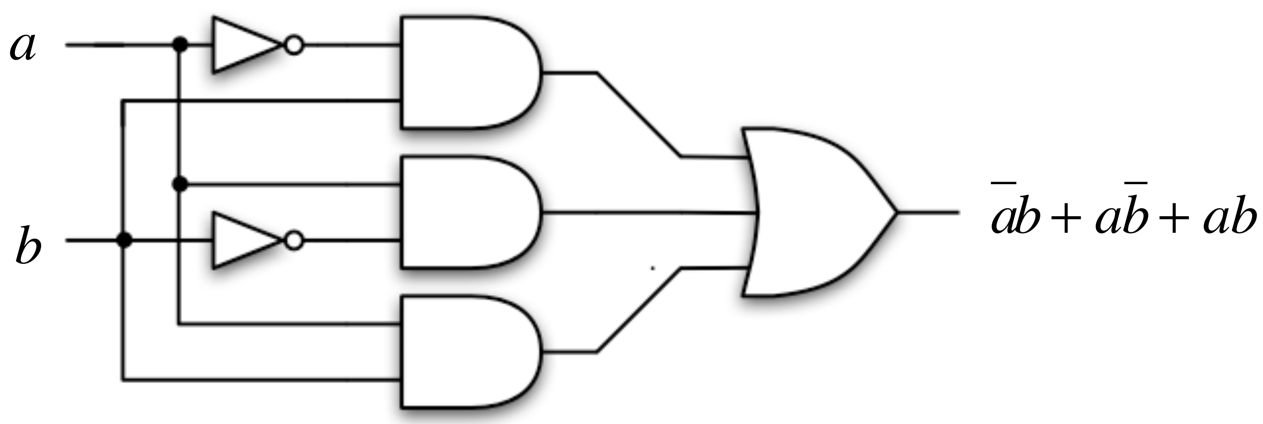
$$Z(a,b) = \overline{a}b + a\overline{b} + ab$$

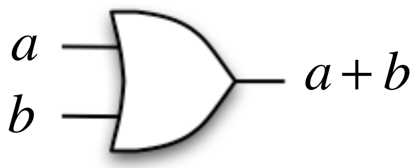
solution simplifiée:

$$Z(a,b) = a + b$$

- Méthodes de simplification
  - algébrique
  - graphique (table de Karnaugh

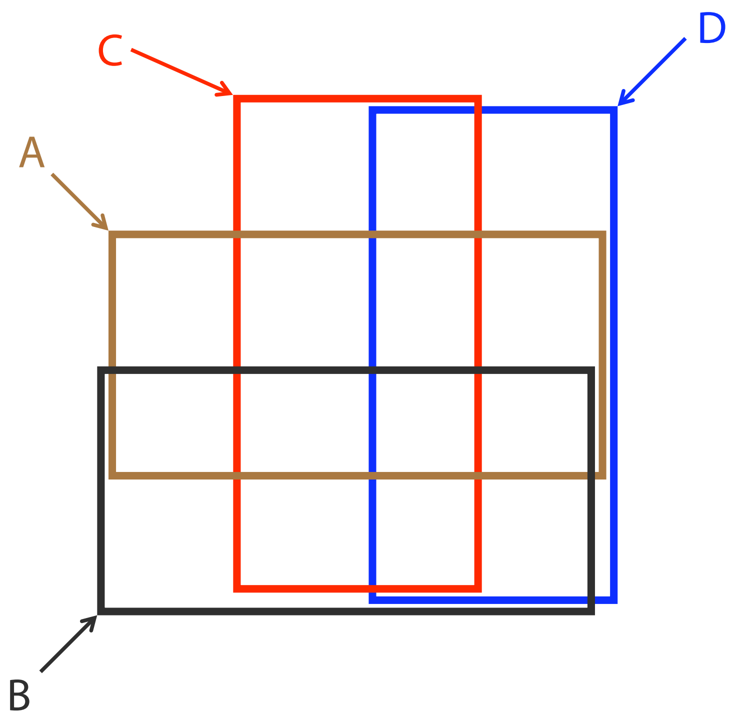
Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne





Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

La table de Karnaugh

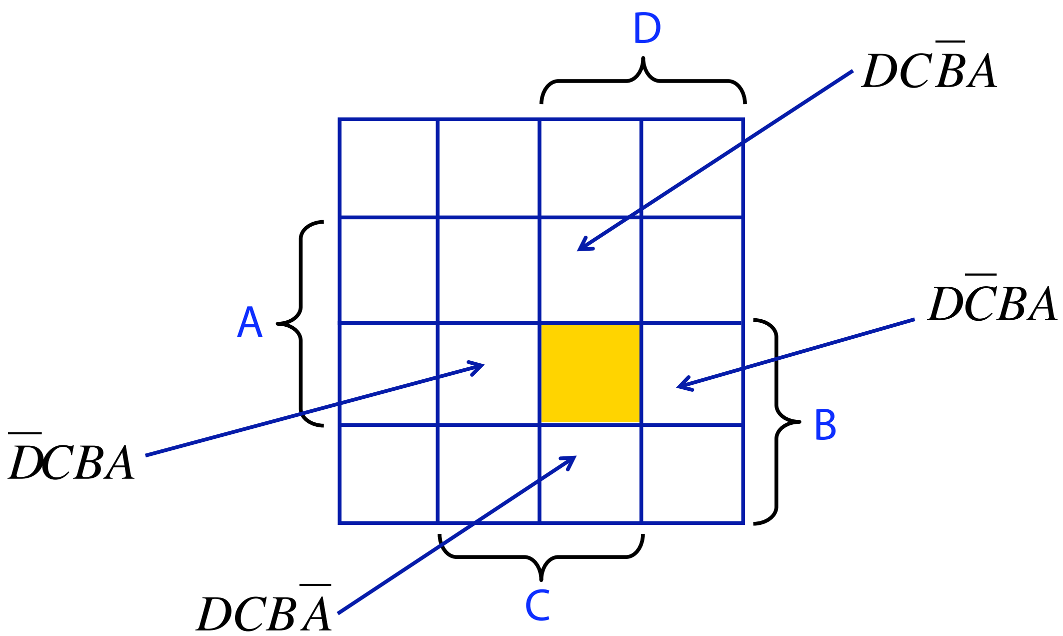


Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

- Une table de Karnaugh est similaire à une table de vérité: les valeurs des sorties sont spécifiées pour toutes les combinaisons des entrées
- Dans la table de vérité, chaque combinaison des entrées correspond à une ligne; dans la table de Karnaugh chaque combinaison des entrées correspond à une case. Le nombre de cases de la table de Karnaugh d'une fonction à n variables est donc égal à 2^n
- Les cases de la table de Karnaugh sont arrangées de telle façon qu'une seule variable change entre deux cases contiguës
- Toute case d'une table de Karnaugh à n variables est contiguë à n autres cases

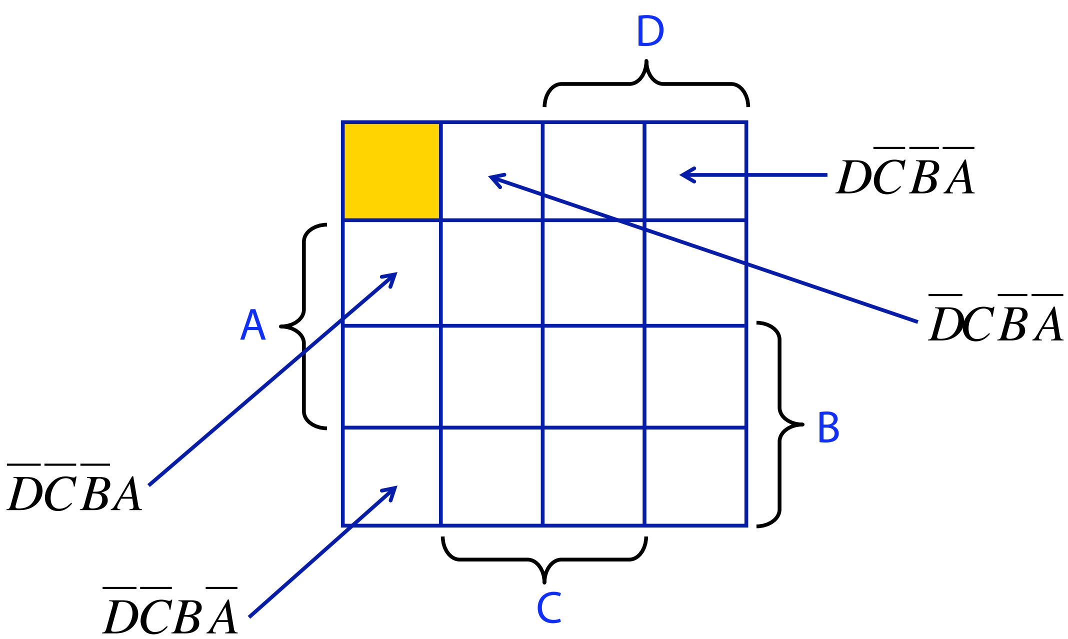
Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

- Exemple: voici les 4 cases contiguës pour la combinaison des entrées DCBA



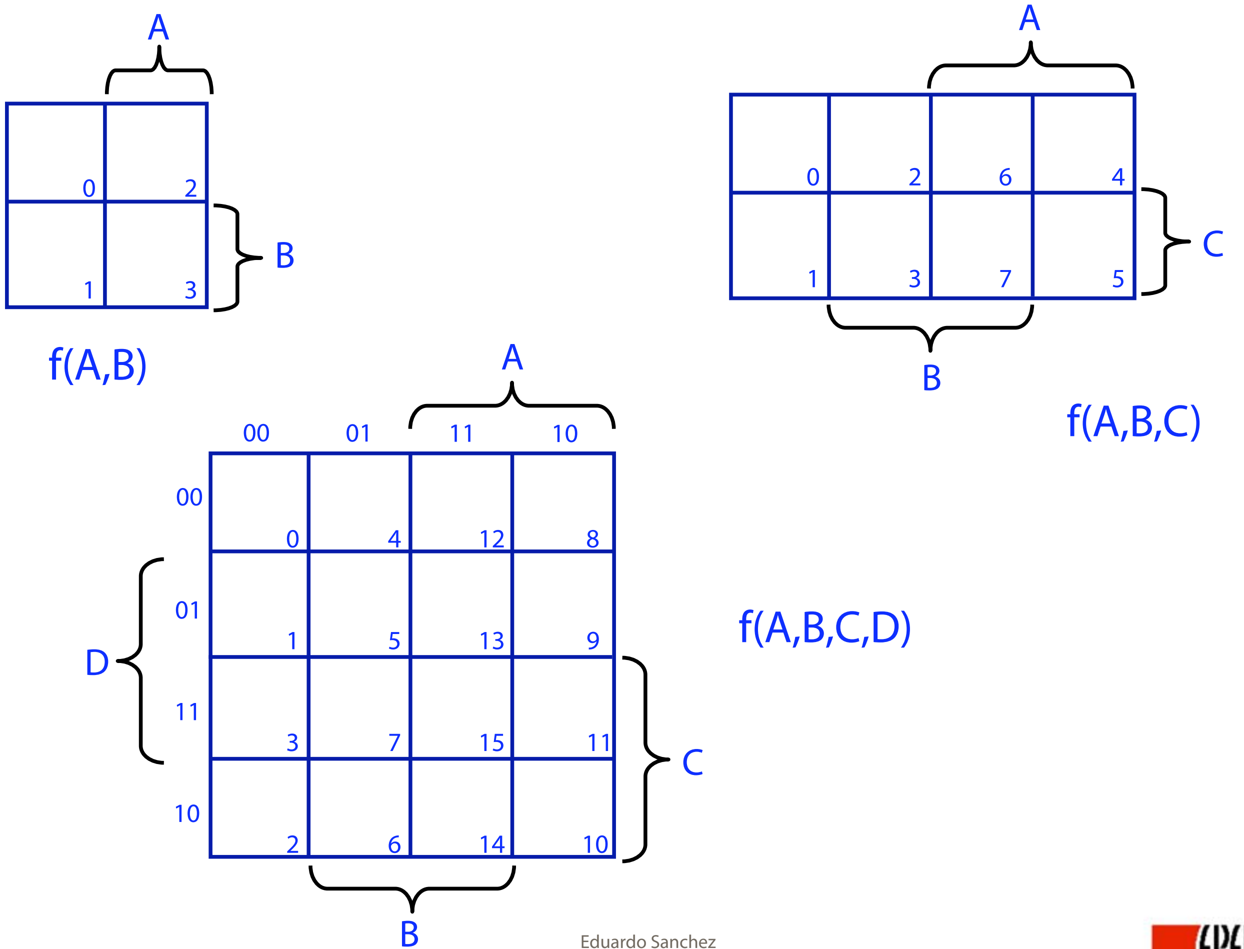
Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

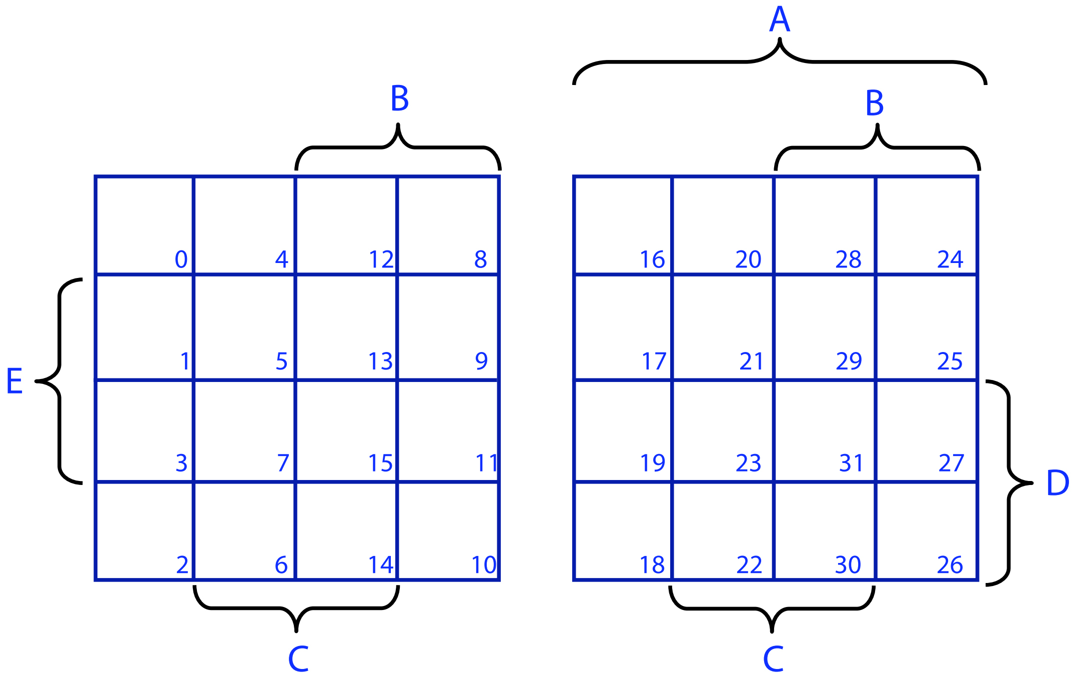
- Exemple: voici les 4 cases contiguës pour la combinaison des entrées D'C'B'A' (l'apostrophe indique l'inversion d'une variable, remplaçant ainsi la barre par dessus la variable)



Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

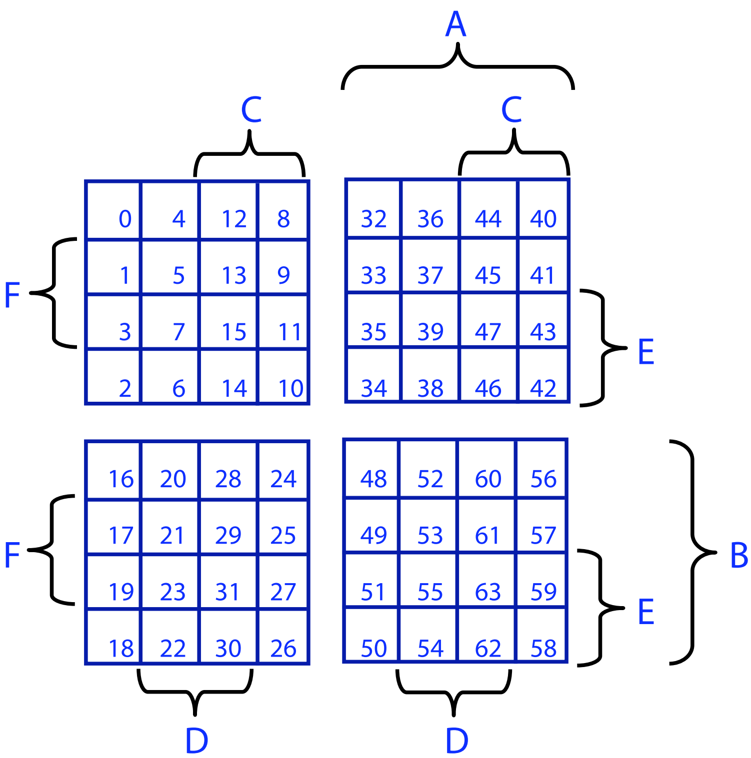
- Il est possible de faire des tables de Karnaugh jusqu'à 6 variables
- Pour respecter la règle de la contiguïté, il faut respecter l'emplacement des variables
- Les numéros des cases des tables de Karnaugh des figures suivantes supposent également un certain ordonnancement des variables: la variable de poids fort correspond à la moitié gauche de la table, etc
- La case numéro 13 d'une fonction à 4 variables, par exemple, correspond à la combinaison des entrées 1101. Pour exprimer algébriquement cette combinaison, il faut connaître les noms des variables et leur ordonnancement. Si les variables sont A,B,C,D, on pourrait avoir ABC'D, DCB'A, etc





f(A,B,C,D,E)

Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne



f(A,B,C,D,E,F)

Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Représentation d'une fonction

- Une fonction est représentée à l'aide d'une table de Karnaugh en mettant la valeur de la fonction à l'intérieur de chaque case
- Exemple: $Z(D,C,B,A) = \sum(3,4,5,6,7,11,12,13,14,15)$

			D	D	
	0_{0}	1_{4}	1_{12}	0_{8}	
A	0_{1}	1_{5}	1_{13}	0_{9}	
A	1_{3}	1_{7}	1_{15}	1_{11}	B
	0_{2}	1_{6}	1_{14}	0_{10}	B
		C	C		

- Exemple à partir d'une table de vérité:

A B C	f
0 0 0	1
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

			A	A	
	00	01	11	10	
0	1_{0}	$_{2}$	1_{6}	1_{4}	
1	$_{1}$	$_{3}$	1_{7}	$_{5}$	C
		B	B		

f(A,B,C)

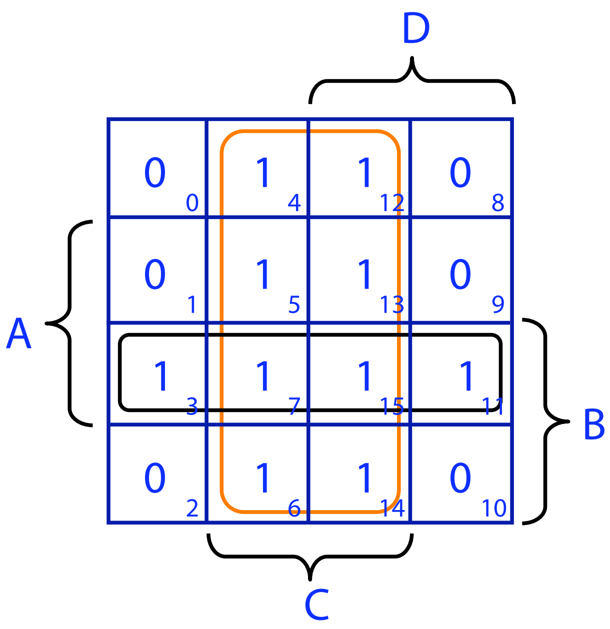
Simplification d'une fonction

- La table de Karnaugh permet l'obtention de l'équation minimale d'une fonction logique, sous la forme d'une somme de produits
- En effet, tout produit logique correspond à un ensemble de cases contiguës dont le nombre est une puissance de 2
- Si le nombre de variables de la fonction est égal à n et le nombre de cases contiguës est égal à 2^m, le produit correspondant aura seulement n-m variables
- La somme de produits minimale d'une fonction correspond donc à l'ensemble minimal de groupes de cases de la table de Karnaugh où la fonction est égal à 1. Le nombre de cases de chaque groupe doit être une puissance de 2

Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

- Exemple:

$$Z(D,C,B,A) = \sum(3,4,5,6,7,11,12,13,14,15)$$



$$Z(D,C,B,A) = AB + C$$

Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

- Impliquant d'une fonction:
  produit des variables de la fonction.
  Chaque impliquant est représenté dans la table de Karnaugh par un groupe de cases contiguës, en un nombre égal à une puissance de deux
- Impliquant premier:
  impliquant qui n'est pas inclus dans un autre impliquant plus grand.
  La solution minimale d'une fonction est formée seulement d'impliquants premiers. Mais tous les impliquants premiers ne font nécessairement pas partie de la solution minimale
- Impliquant premier essentiel:
  impliquant premier qui contient au moins un minterme qui n'est pas inclus dans un autre impliquant premier. Un impliquant premier essentiel fait toujours partie de la solution minimale

Méthode de minimisation

- Dresser la liste de tous les impliquants premiers de la fonction
- Dresser la liste de tous les impliquants premiers essentiels
- Tous les impliquants premiers essentiels font partie de la solution minimale
- Couvrir les mintermes restants avec un nombre minimal d'impliquants premiers

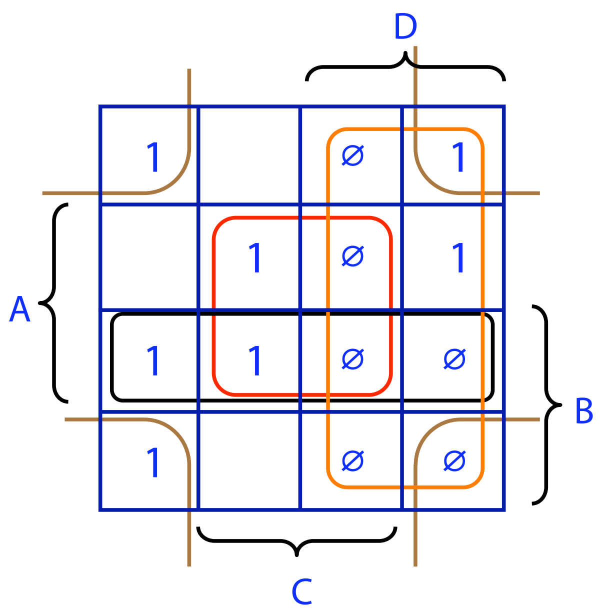
Fonctions incomplètement définies

- Une fonction est incomplètement définie si la valeur de l'état de sortie n'est pas définie pour les 2^n états d'entrée possibles
- L'état d'entrée où la sortie n'est pas définie est un état $\varnothing$ ou condition indifférente (en anglais, "*don't happen*" ou "*don't care*")
- Pour un état $\varnothing$ la sortie peut prendre la valeur 0 ou 1: plusieurs solutions existent donc pour une même fonction, selon les valeurs choisies pour les états $\varnothing$
- La méthode de minimisation d'une fonction par la table de Karnaugh s'applique également aux fonctions incomplètement définies: tous les états $\varnothing$ sont mis à 1 et l'on cherche la solution minimale pour cette borne supérieure de la fonction; bien entendu, les impliquants composés seulement d'états $\varnothing$ sont éliminés

Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

- Exemple:

$$f(D,C,B,A) = \sum(0,2,3,5,7,8,9) + \sum\varnothing(10,11,12,13,14,15)$$



$$f(D,C,B,A) = D + CA + \bar{C}\bar{A} + BA$$

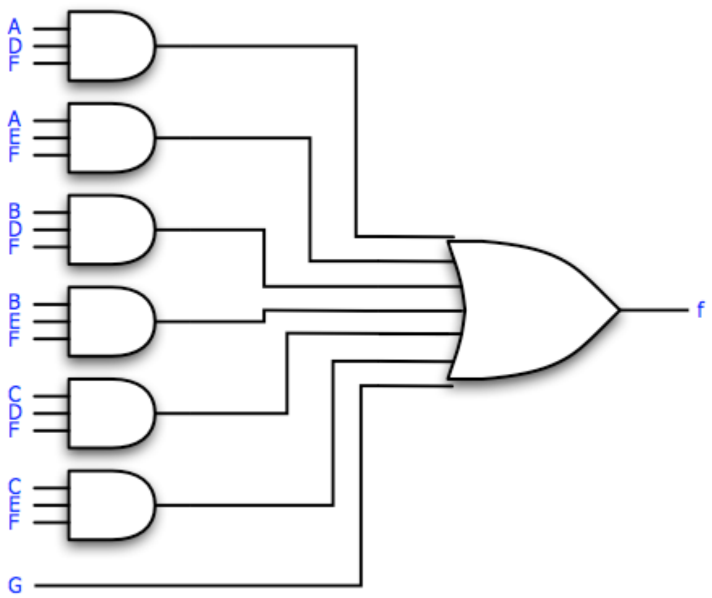
Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Logique multiniveaux

- Exemple:

  $$f(A,B,C,D,E,F,G)=ADF+AEF+BDF+BEF+CDF+CEF+G$$

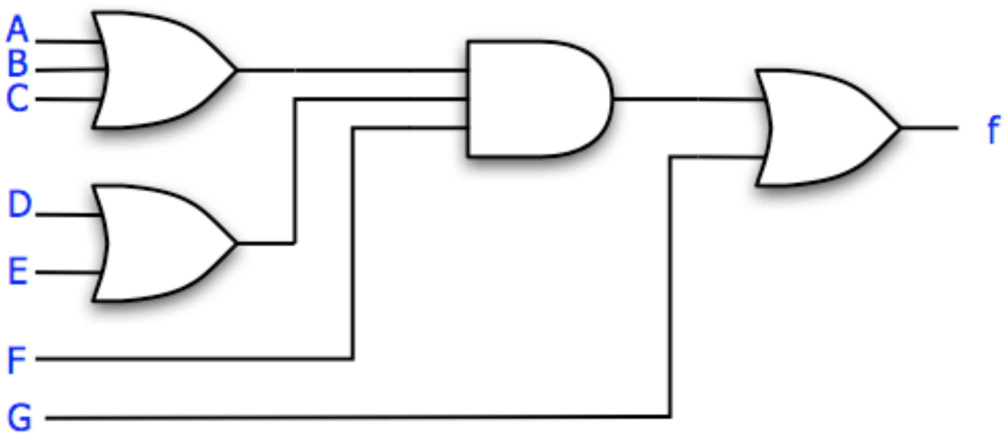
  Solution minimale à deux niveaux:



Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

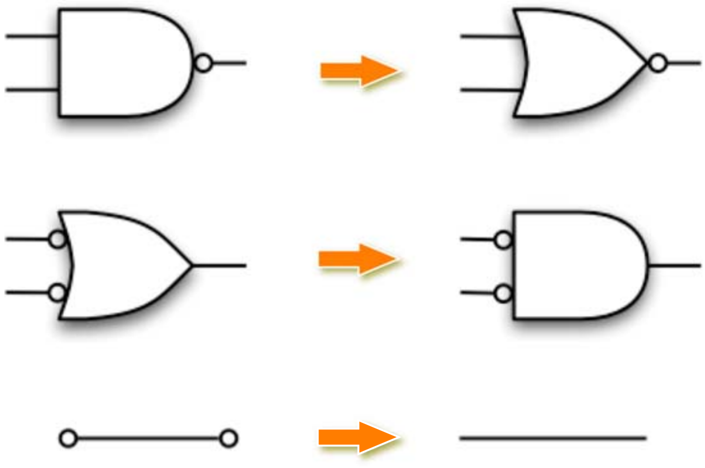
Solution minimale multiniveaux:

$$\begin{aligned} f &= (AD+AE+BD+BE+CD+CE)F + G \\ &= ((A+B+C)D+(A+B+C)E)F + G \\ &= (A+B+C)(D+E)F + G \end{aligned}$$



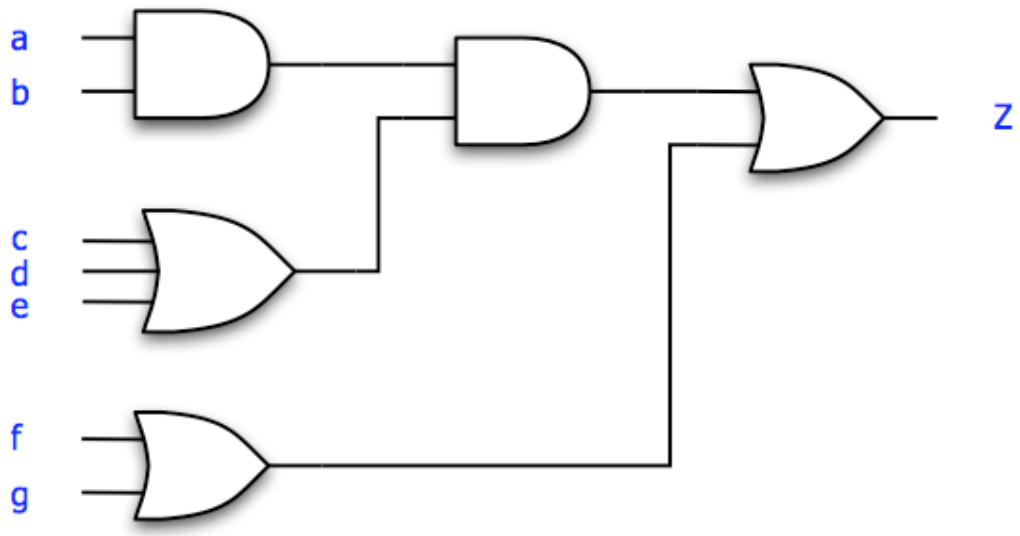
Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Conversion en portes NAND et NOR



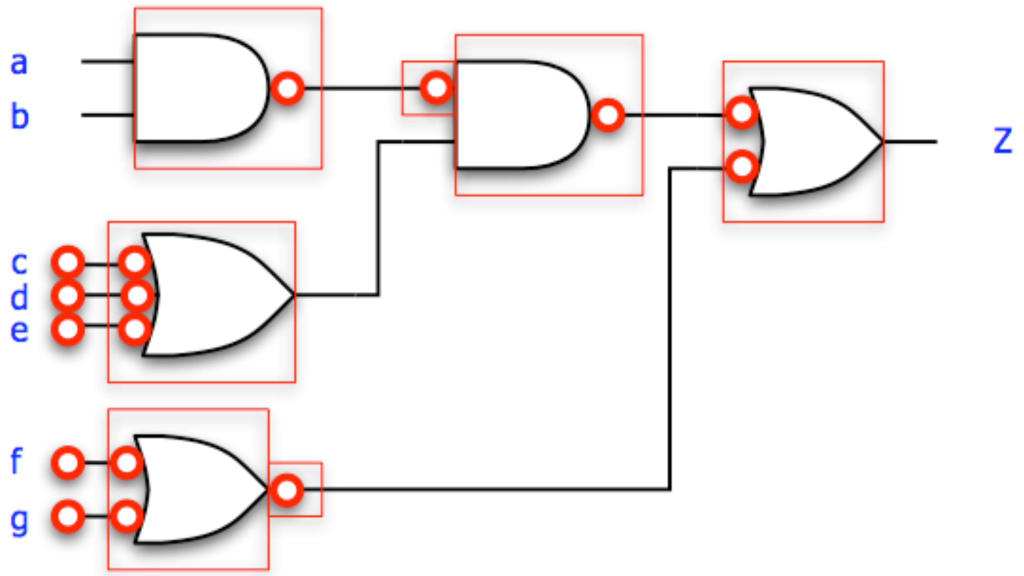
Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

◆ Exemple:



Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Solution avec des portes NAND:



Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

A lire dans Wakerly

- Chapitre 4
  - 4.3: synthèse de fonctions combinatoires

Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne