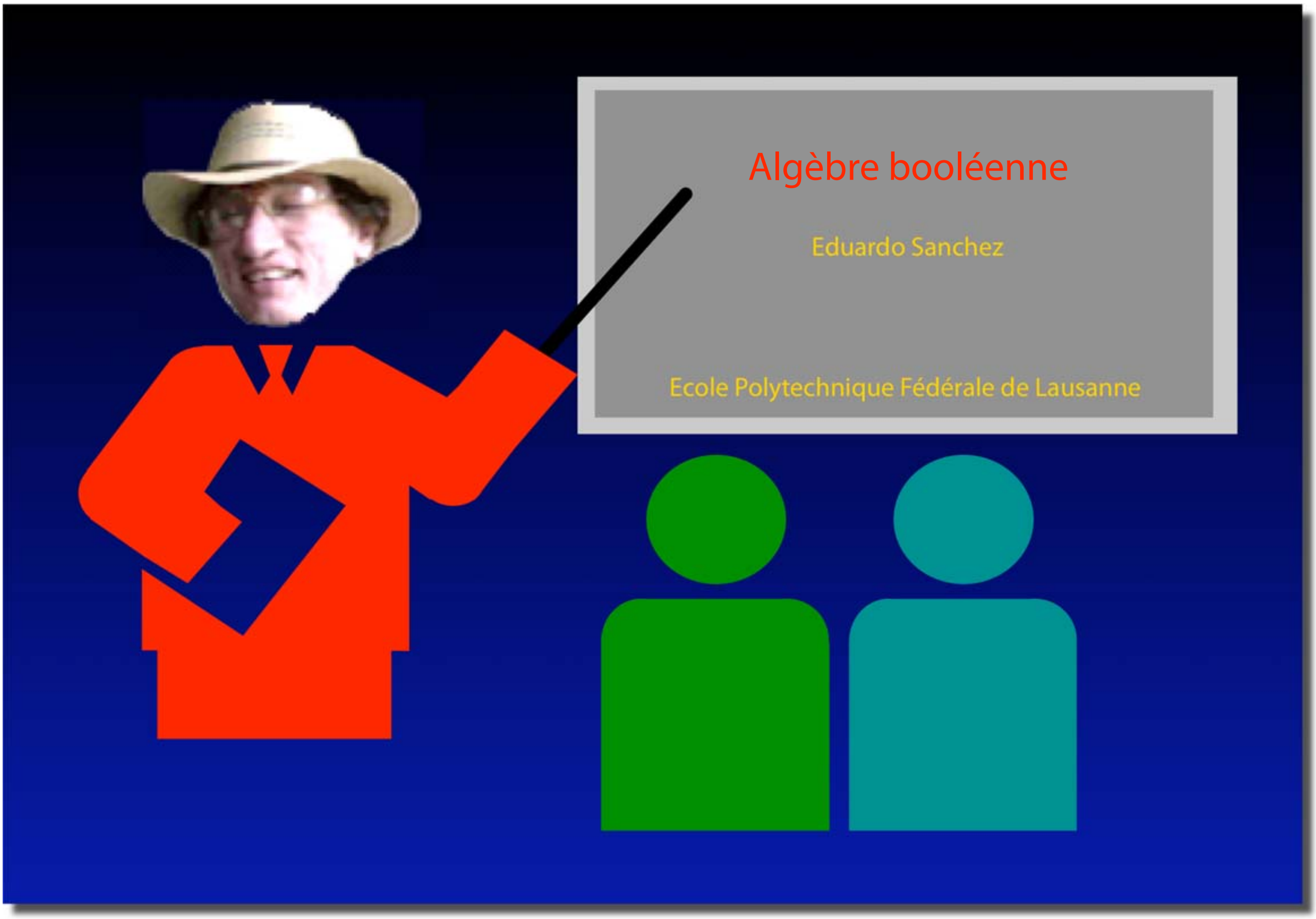


Système binaire

- Système digital qui emploie des signaux à deux valeurs uniques
- En général, les digits employés sont 0 et 1, qu'on appelle bits (*binary digits*)
- Avantages:
  - on peut utiliser des interrupteurs comme éléments de base du système
  - un signal binaire est plus fiable qu'un autre à plus d'états
  - les décisions prises dans un système digital sont très souvent binaires

Système logique

- C'est un système qui traite l'information de façon digitale
- Pour étudier un système logique, il faut connaître les éléments de base (les composants) et le langage mathématique qui permet d'écrire les équations de comportement
- Pour un additionneur:

X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$Z = f\ (X, Y)$

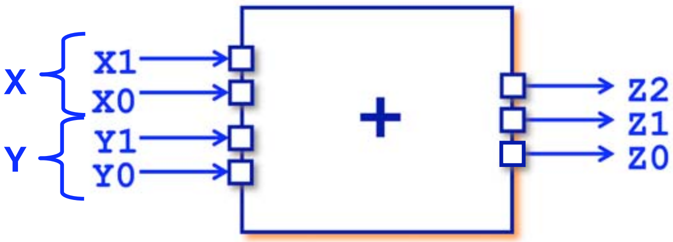
Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Types de systèmes logiques

- Système combinatoire:
  - la valeur des sorties à un moment donné dépend uniquement des valeurs des entrées à cet instant
  - le comportement est entièrement décrit par une table, la *table de vérité*, où pour chaque combinaison des entrées on donne la valeur des sorties
  - pour n entrées, la table de vérité comporte 2^n lignes
  - la sortie est immédiate
- Système séquentiel:
  - la valeur des sorties dépend de l'histoire des entrées, de leur séquence dans le temps
  - l'obtention d'un résultat peut demander plusieurs pas
  - le système doit se rappeler des résultats intermédiaires: il faut une *mémoire*

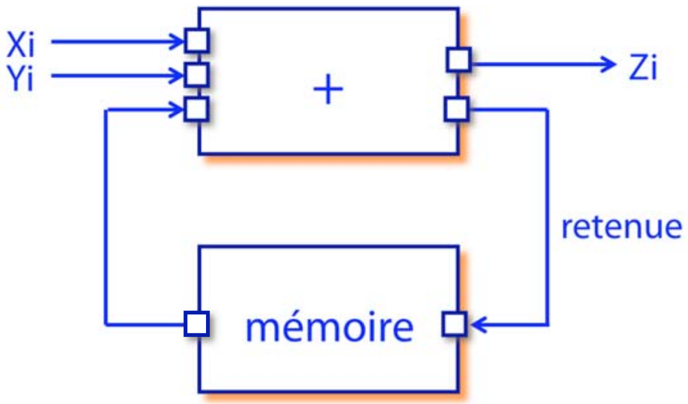
Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Additionneur combinatoire



X1	X0	Y1	Y0	Z2	Z1	Z0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	0

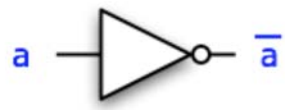
Additionneur séquentiel

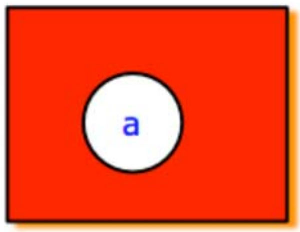


Fonctions logiques de base

- NON (NOT): inversion ou complément logique

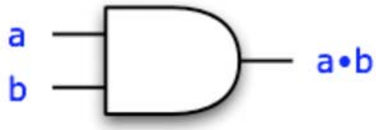
a	$\overline{a}$
0	1
1	0

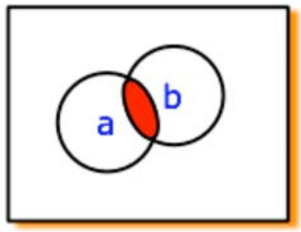




- ET (AND): produit ou intersection logique

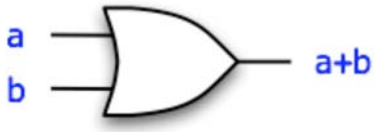
a	b	a•b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

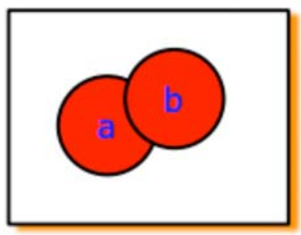




- OU (OR): somme ou union logique

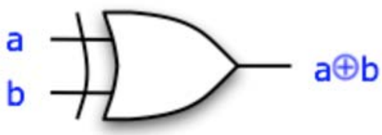
a	b	a+b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

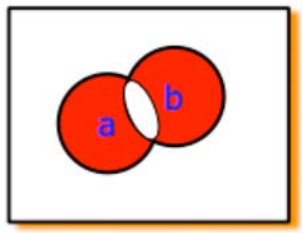




- OU-exclusif (XOR)

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0





Algèbre de Boole

- **Commutativité:**

$$a \bullet b = b \bullet a$$

$$a + b = b + a$$

- **Idempotence:**

$$a \bullet a = a$$

$$a + a = a$$

- **Constantes:**

$$a \bullet 0 = 0 \qquad a + 0 = a$$

$$a \bullet 1 = a \qquad a + 1 = 1$$

- **Complémentation:**

$$a \bullet \overline{a} = 0$$

$$a + \overline{a} = 1$$

Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

- **Distributivité:**

$$a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$$

$$a + (b \bullet c) = (a + b) \bullet (a + c)$$

- **Associativité:**

$$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c = a \bullet b \bullet c$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$$

- **Consensus:**

$$(a \bullet \overline{x}) + (b \bullet x) + (a \bullet b) = (a \bullet \overline{x}) + (b \bullet x)$$

$$(a + \overline{x}) \bullet (b + x) \bullet (a + b) = (a + \overline{x}) \bullet (b + x)$$

- **De Morgan:**

$$\overline{(a \bullet b)} = \overline{a} + \overline{b}$$

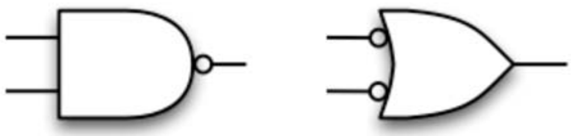
$$\overline{(a + b)} = \overline{a} \bullet \overline{b}$$

Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Fonctions complètes

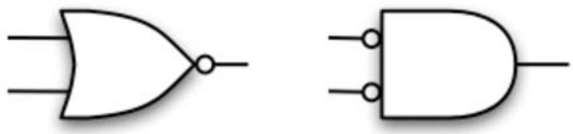
- Un opérateur est complet lorsqu'il permet la réalisation des trois fonctions logiques de base (NON, ET, OU)
- NAND

$$a \uparrow b = (\overline{a \bullet b}) = \bar{a} + \bar{b}$$



- NOR

$$a \downarrow b = (\overline{a + b}) = \bar{a} \bullet \bar{b}$$



Forme canonique algébrique

- Un minterme de n variables est un monôme possédant les n variables, sous forme vraie ou inversée.
  Il existe un minterme par état d'entrée d'une fonction combinatoire (ou ligne de la table de vérité)

- Toute fonction logique combinatoire peut être exprimée comme une somme de mintermes, ceux où la fonction est égale à 1: c'est la forme canonique algébrique, unique pour une fonction donnée

- Un monôme est un produit logique de n variables, vraies ou inversées
- Un polynôme est une somme logique de plusieurs monômes

- Toute fonction logique peut être exprimée sous la forme d'un polynôme et réalisée à l'aide des portes NON, ET et OU
- La représentation graphique d'une telle réalisation est un logigramme

Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Forme canonique décimale

- Si chaque minterme est remplacé par la valeur décimale correspondante à la combinaison binaire de ses variables (1 si la variable est vraie et 0 si elle est inversée), on obtient la forme canonique décimale d'une fonction logique combinatoire. Dans ce cas, il est impératif de préciser l'ordre et le nombre des variables

Eduardo Sanchez
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Exemple

- Fonction majorité:
  la sortie vaut 1 si une majorité des entrées possède la valeur 1
- Table de vérité pour la majorité de 3 variables:

a	b	c	MAJ(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

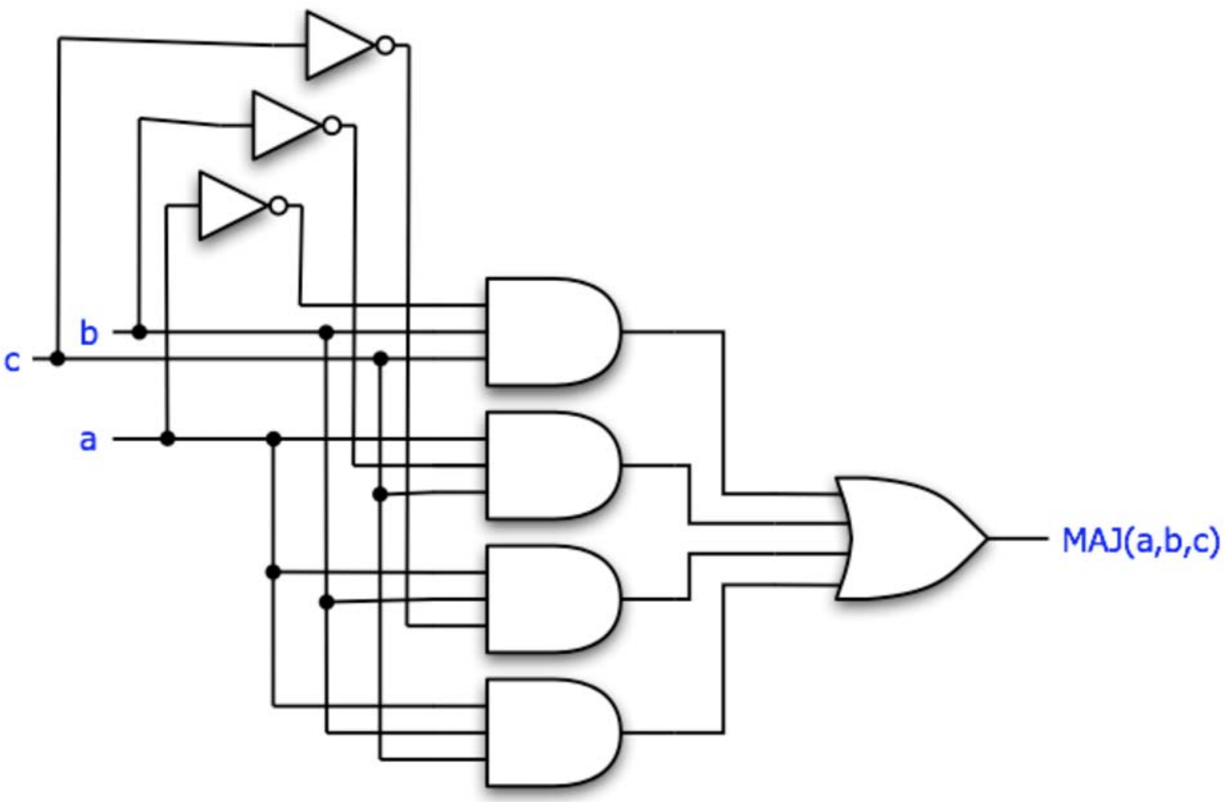
- Forme canonique algébrique:

$$MAJ(a,b,c) = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$$

- Forme canonique décimale:

$$MAJ(a,b,c) = \sum 3,5,6,7$$

- Logigramme:


c
b
a
MAJ(a,b,c)